第17講　実数解の個数

17

［A］ k を実数の定数とするとき，x の方程式

$$x^3+x^2-kx-(k+4)=0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ a を実数の定数とするとき，x の方程式

$$x+1=ae^x$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　実数解の個数

17　a を実数の定数とするとき，x の方程式

$$\log x = a\sqrt{x} \quad (x > 0)$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　実数解の個数

17

［A］ kを実数の定数とするとき，xの方程式

$$x^3+x^2-kx-(k+4)=0$$

の異なる実数解の個数を求めよ.

［B］ aを実数の定数とするとき，xの方程式

$$x+1=ae^x$$

の異なる実数解の個数を求めよ.

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は証明せずに用いてもよい.

【答】 ［A］$\begin{cases}1 & (k<8\text{ のとき})\\ 2 & (k=8\text{ のとき})\\ 3 & (k>8\text{ のとき})\end{cases}$　［B］$\begin{cases}0 & (a>1\text{ のとき})\\ 1 & (a\leqq 0,\ a=1\text{ のとき})\\ 2 & (0<a<1\text{ のとき})\end{cases}$

【解説】 ［A］ $f(x)=x^3+x^2-kx-(k+4)$ とおくと，

$f(-1)=-1+1+k-k-4=-4\neq 0$ より $f(x)=0$ は $x=-1$ を解にもたないことがわかる.

よって $f(x)=0$ は $x^3+x^2-4=k(x+1)$ つまり $\dfrac{x^3+x^2-4}{x+1}=k$ と考えることができる.

ここで　$g(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x+1}$ とおくと，$g(x)=x^2-\dfrac{4}{x+1}$ より

$g'(x)=2x+\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{2(x+2)(x^2+1)}{(x+1)^2}$ となるので，$g(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\times$	$+$	
$g(x)$	∞	↘	8	↗	$\infty/-\infty$	↗	∞

となる．よって求める個数は $\begin{cases}\mathbf{1} & (\boldsymbol{k<8}\text{ のとき})\\ \mathbf{2} & (\boldsymbol{k=8}\text{ のとき})\\ \mathbf{3} & (\boldsymbol{k>8}\text{ のとき})\end{cases}$

［B］ $x+1=ae^x \iff (x+1)e^{-x}=a$ なので $f(x)=(x+1)e^{-x}$ とおくと，

$f'(x)=-xe^{-x}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$ などより $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

となる.

よって求める個数は $\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{a>1}\text{ のとき})\\ \mathbf{1} & (\boldsymbol{a\leqq 0,\ a=1}\text{ のとき})\\ \mathbf{2} & (\boldsymbol{0<a<1}\text{ のとき})\end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　実数解の個数

17　a を実数の定数とするとき，x の方程式

$$\log x = a\sqrt{x}\ (x>0)$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

【答】 $\begin{cases} 0 & \left(a>\dfrac{2}{e}\text{のとき}\right) \\ 1 & \left(a\leqq 0,\ a=\dfrac{2}{e}\text{のとき}\right) \\ 2 & \left(0<a<\dfrac{2}{e}\text{のとき}\right) \end{cases}$

【解説】 $\log x = a\sqrt{x} \iff \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}=a$ より $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-(\log x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}2\times\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$

などより $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	0

となるので，実数解の個数は $\begin{cases} \mathbf{0} & \left(\boldsymbol{a>\dfrac{2}{e}}\ \textbf{のとき}\right) \\ \mathbf{1} & \left(\boldsymbol{a\leqq 0,\ a=\dfrac{2}{e}}\ \textbf{のとき}\right) \\ \mathbf{2} & \left(\boldsymbol{0<a<\dfrac{2}{e}}\ \textbf{のとき}\right) \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。